

**VŠB – Technická univerzita Ostrava**  
**Fakulta elektrotechniky a informatiky**

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

**VŠB – Technická univerzita Ostrava**  
**Fakulta elektrotechniky a informatiky**  
**Katedra elektroenergetiky**

Úloha na měření magnetického pole  
Labour for the magnetic Field Measuring

VŠB - Technická univerzita Ostrava  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Katedra elektroenergetiky

## Zadání bakalářské práce

Student:

**Daniel Socha**

Studijní program:

B2649 Elektrotechnika

Studijní obor:

3907R001 Elektroenergetika

Téma:

Úloha na měření magnetického pole  
Labour for the magnetic Field Measuring

Jazyk vypracování:

čeština

Zásady pro vypracování:

1. Na příkladu dvou vzduchových cívek uveďte vztahy mezi indukci a indukčností.
2. Pro jednotlivé cívky a jejich sériové zapojení měřte indukce a indukčností.
3. Naměřené hodnoty porovnejte s výpočty.

Seznam doporučené odborné literatury:

MAYER, Daniel. Aplikovaný elektromagnetismus. České Budějovice : Kopp, 2012. 538 s. ISBN 978-80-7232-436-1


Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.


Vedoucí bakalářské práce: **doc. Dr. Ing. Věslav Mach**

Datum zadání: 01.09.2015

Datum odevzdání: 29.04.2016



  
prof. Ing. Stanislav Rusek, CSc.  
vedoucí katedry

  
prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.  
děkan fakulty

# Prohlášení studenta

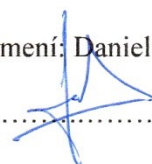
---

*„Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.“*

V Ostravě, dne: 25. 4. 2016

Jméno a příjmení: Daniel Socha

Podpis: .....



# Poděkování

---

*„Rád bych poděkoval doc. Dr. Ing. Věslavu Machovi za cenné rady, věcné připomínky, vstřícnost při konzultacích, za spolupráci při získávání údajů a vypracování mé bakalářské práce.“*

# Abstrakt

---

Tématem bakalářské práce je úloha na měření magnetického pole. Cílem této práce je ukázat možnost výpočtu fyzikálních veličin soustavy v magnetickém poli zaměřenou na výpočet magnetické indukce jakožto hlavní veličiny, která slouží ke kvantitativnímu popisu magnetického pole. V práci je obsažen jak výpočet homogenního magnetického pole uvnitř cívky (solenoidu) vycházejícího z Ampérova zákona, tak i mapování magnetického pole pomocí sondy vně cívky. Pro ověření hodnot magnetické indukce vně cívky výpočtem je možno použít Biotův-Savartův zákon. Práce dále obsahuje výpočet indukčností a to jak samostatných cívek, tak i sériového spojení. V závěru práce jsou uvedeny chyby, které vznikly během měření a výpočtu a pravděpodobný důvod jejich vzniku.

## Klíčová slova

---

EXTECH Model 480826, Ampérův zákon, Biotův-Savartův zákon, magnetické pole solenoidu, magnetická indukce, magnetický tok, sériové zapojení cívek, vlastní a vzájemná indukčnost

# Abstract

---

The topic of the bachelor thesis is Labour for the magnetic Field Measuring. The aim of this work is to show the possibility of calculating physical quantities of system in a magnetic field focused on the calculation of the magnetic induction as the main physical quantity, which is used for quantitative description of magnetic field. This work contains calculation of the homogeneous magnetic field inside the coil (solenoid) based on Ampere's law and magnetic field mapping outside the coil with probe. There is a Biot-Savart law used for verification of measured values of magnetic induction by calculation in the thesis. Thesis further comprises calculation of inductance of both coils and their serial connection. There are errors in conclusion, which arose during the measurement and calculation and probable reason of their origin.

## Key Words

---

EXTECH Model 480826, Ampere's law, Biot-Savart law, magnetic field of solenoid, magnetic induction, magnetic flux, serial connection of coils, self and mutual inductance

# Obsah

---

Úvod.....	1
1 EXTECH Model 480826.....	2
1.1 Představení přístroje.....	2
1.2 Popis přístroje.....	2
1.3 Specifikace .....	3
2 Teoretický rozbor .....	4
2.1 Magnetické pole .....	4
2.2 Solenoid.....	4
2.3 Magnetické pole solenoidu.....	4
3 Odvození vztahů.....	5
3.1 Ampérův zákon .....	5
3.2 Magnetická indukce v určitém bodě na ose kruhového závitu.....	6
3.3 Vztah mezi magnetickou indukcí a indukčností cívky.....	7
3.4 Vlastní indukčnost.....	8
3.5 Vzájemná indukčnost .....	9
3.6 Sériové spojování cívek .....	9
4 Jednovrstvá cívka .....	10
5 Vícevrstvá cívka.....	15
6 Sériové řazení cívek .....	21
6.1 Impedance sériového řazení cívek .....	21
6.2 Indukčnost sériového řazení cívek .....	21
6.3 Magnetická indukce sériového řazení cívek (souhlasně) .....	22
6.4 Magnetická indukce sériového řazení cívek (opačně).....	26
7 Závěr .....	29
8 Literatura .....	31



# Seznam použitých symbolů a zkratek

---

Značka	Veličina	Hlavní jednotka
$a''$	šířka obalu vzduchového jádra	m
$a'$	šířka vzduchového jádra	m
$B$	magnetická indukce	T
$D$	průměr	m
$f$	frekvence	Hz
$h$	výška vinutí	m
$I$	elektrický proud	A
$K$	Nagaokův činitel	-
$l$	délka	m
$l_v$	délka vodiče	m
$L$	vlastní indukčnost	H
$m$	mezera mezi závitů	m
$M$	vzájemná indukčnost	H
$N$	počet závitů	-
$r$	poloměr	m
$R$	činný odpor	$\Omega$
$S$	plocha	$m^2$
$S_{Cu}$	průřez měděného vodiče	$m^2$
$S_j$	plocha jádra	$m^2$
$u, U$	elektrické napětí	V
$x$	vzdálenost závitu od sondy	m
$X$	reaktance	$\Omega$
$X_+$	reaktance souhlasného spojení cívek	$\Omega$
$X_-$	reaktance opačného spojení cívek	$\Omega$
$X_M$	vzájemná reaktance	$\Omega$
$Z$	impedance	$\Omega$
$\Delta$	absolutní chyba	příslušná veličina
$\delta$	relativní chyba	%
$\lambda$	magnetická vodivost obvodu	H
$\mu_0$	permeabilita (vakua)	H/m
$\phi$	magnetický tok	Wb
$\omega$	uhlová frekvence	rad/s, 1/s

# Seznam ilustrací

---

Obrázek 1 - EXTECH Model 480826 .....	2
Obrázek 2 – Solenoid .....	4
Obrázek 3 - Uzavřená Ampérova křivka .....	5
Obrázek 4 - Magnetická indukce v určitém bodě od proudové smyčky .....	6
Obrázek 5 - Nárys a bokorys jednovrstvé cívky .....	10
Obrázek 6 - Schéma zapojení jednovrstvé cívky .....	10
Obrázek 7 - Délka vinutí a průměr vinutí .....	11
Obrázek 8 - Poloha sondy u jednovrstvé cívky .....	13
Obrázek 9 – Nárys a bokorys vícevrstvé cívky .....	15
Obrázek 10 - Schéma zapojení vícevrstvé cívky .....	15
Obrázek 11 - Poloměry a střední délky vodiče .....	16
Obrázek 12 - Poloha sondy u vícevrstvé cívky .....	18
Obrázek 13 - Náhradní schéma sériového spojení .....	21
Obrázek 14 - Poloha sondy sériového řazení cívek .....	22
Obrázek 15 - Schéma sériového řazení cívek .....	23
Obrázek 16 - Poloha sondy sériového řazení cívek (opačná orientace) .....	26
Obrázek 17 - Schéma sériového řazení cívek (opačná orientace) .....	26

# Seznam tabulek

---

Tabulka 1 - Parametry zařízení EXTECH Model 480826 .....	3
Tabulka 2 - Rozměry a elektrické parametry jednovrstvé cívky .....	10
Tabulka 3 - Činitel $K$ v závislosti na poměru $D/l$ .....	11
Tabulka 4 - Vypočtené hodnoty jednovrstvé cívky .....	14
Tabulka 5 - Změřené hodnoty magnetické indukce jednovrstvé cívky .....	14
Tabulka 6 - Rozměry a elektrické parametry vícevrstvé cívky .....	15
Tabulka 7 - Délky vodiče pro jednotlivé vrstvy a pro celou cívku .....	16
Tabulka 8 - Vypočtené hodnoty vícevrstvé cívky .....	20
Tabulka 9 - Změřené hodnoty magnetické indukce jednovrstvé cívky .....	20
Tabulka 10 - Vypočtené veličiny sériového spojení stejné orientace cívek .....	25
Tabulka 11 - Změřené hodnoty magnetické indukce sériového spojení stejné orientace cívek .....	25
Tabulka 12 - Vypočtené veličiny sériového spojení opačné orientace cívek .....	28
Tabulka 13 - Změřené hodnoty magnetické indukce sériového spojení opačné orientace cívek .....	28

## Úvod

Tématem bakalářské práce je úloha na měření magnetického pole. Magnetismus byl objeven již ve starověkém Řecku a projevuje se působením magnetické síly na objekty v magnetickém poli. V 19. století bylo zjištěno, že magnetismus má blízkou spojitost s elektrickým polem, protože se kolem vodičů projevují magnetické účinky. Později byla tato analogie mezi magnetickým a elektrickým polem sepsána Jamesem C. Maxwellem v díle Maxwellova teorie elektromagnetismu.

S měřením magnetického pole přichází celá řada komplikací a problémů. V první řadě to jsou ideální podmínky bez cizích elektromagnetických rušení, které způsobují nepřesnost měření. Takových podmínek je velmi těžké dosáhnout, protože se v současné době v našem okolí vyskytuje velmi mnoho elektrických zařízení a vysílačů generujících tato pole. V úvahu se musí brát i vznik elektromagnetického pole napájecí soustavy i vlastního měřicího přístroje.

Tato bakalářská práce má za úkol vyzkoušet nové vybavení sloužící k měření magnetické indukce v podobě přístroje EXTECH Model 480826 a také posloužit jako inspirace pro budoucí měřicí úlohu pro studenty Vysoké školy Báňské – Technické univerzity Ostrava (VŠB-TUO). Dílo lze rozdělit do pěti částí – představení přístroje EXTECH Model 480826, teoretický rozbor, odvození vztahů, vlastní zpracování úloh a závěr.

Samotný začátek práce se zabývá vlastním měřicím přístrojem EXTECH Model 480826. Krom krátkého úvodního představení přístroje je uveden i popis všech nedílných součástí, včetně parametrů přístroje, jako měřicí rozsahy, přesnost, rozměry a mnoho dalších.

Druhá část je věnována teoretickému rozboru úloh. V krátkosti je představeno magnetické pole a jeho druhy, dále teorie ideálního solenoidu a jeho magnetického pole. Tento teoretický základ slouží pro lepší představu a snazší pochopení problému.

Třetí část obsahuje odvození jednotlivých vztahů, které se budou uplatňovat ve výpočetní části jako například Ampérův zákon, Biotův-Savartův zákon, výpočet magnetické indukce cívky a mnoho dalších. Následuje krátká teorie a odvození vlastní indukčnosti, vzájemné indukčnosti a indukčnosti sériového spojení cívek.

Po odvození přichází na řadu zpracování změřených hodnot. Cílem úloh je demonstrovat postup výpočtu magnetické indukce pro solenoid, vícevrstvou cívku a jejich sériové kombinace. Sekundárním úkolem je ukázat možnost výpočtu jednotlivých parametrů, v některých případech, pro srovnání, i různými metodami.

V závěru se vyskytuje zhodnocení změřených a vypočtených hodnot, posouzení chyb a odchylek a objasnění důvodu jejich vzniku.

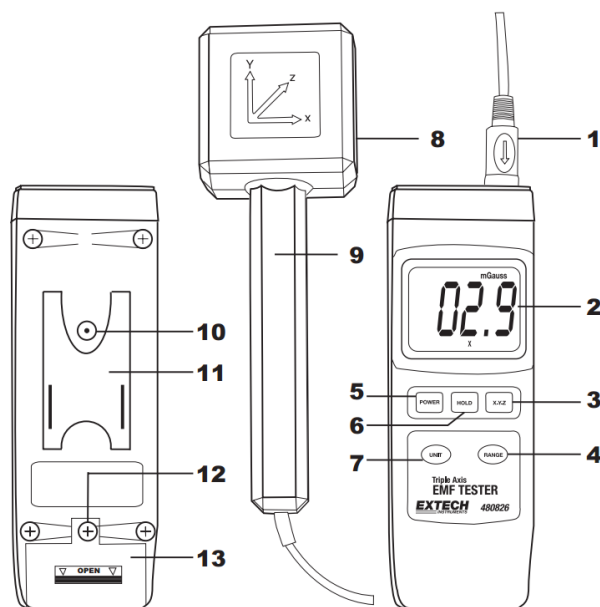
# 1 EXTECH Model 480826 [1]

## 1.1 Představení přístroje

EXTECH Model 480826 je baterií napájený přístroj, který slouží k měření elektromagnetického pole. Přístroj vyhodnotí velikost magnetické indukce  $B$  a hodnotu zobrazí na displeji. Přístrojem lze měřit ve dvou jednotkách (Gauss nebo Tesla), dle nastavení uživatele. Šířka frekvenčního pásma se pohybuje od 30 do 300 Hz. Zařízení využívá senzor umožňující měřit magnetickou indukci v daném bodě ve všech třech osách kartézské soustavy souřadnic (xyz). Model 480826 je speciálně navržen k určení velikostí magnetického pole v okolí elektrického vedení, počítačů, elektrických spotřebičů, televizorů a mnoho dalších podobných zařízení. Přístroj je dodán plně testovaný a kalibrovaný.

## 1.2 Popis přístroje

1. Zástrčka senzoru
2. LCD displej
3. Výběr osy XYZ
4. Tlačítko manuální rozsah
5. Tlačítko zapnutí
6. Tlačítko držet hodnotu
7. Tlačítko výběr jednotky
8. Senzor
9. Rukojeť senzoru
10. Otvor pro stativ
11. Stojan
12. Šroub krytu baterie
13. Kryt baterie



Obrázek 1 - EXTECH Model 480826 [1]

## 1.3 Specifikace

Tabulka 1 - Parametry zařízení EXTECH Model 480826

<b>Displej</b>	3-1/2 digit (počet 2000) LCD
<b>Rychlost měření</b>	Přibližně 0,4 s
<b>Rozsahy</b>	20 $\mu$ T a 200 mG 200 $\mu$ T a 2000 mG 2000 $\mu$ T a 20,000 mG Poznámka: 1 $\mu$ T = 10 mG
<b>Přesnost</b>	$\pm$ (4%FS + 3 digits) pro rozsah 20 $\mu$ T a 200 mG $\pm$ (5%FS + 3 digits) pro rozsah 200 $\mu$ T a 2000 mG $\pm$ (10%FS + 5 digits) pro rozsah 2000 $\mu$ T a 20,000 mG
<b>Frekvenční pásmo</b>	30 – 300Hz
<b>Operační teplota</b>	0 – 50°C (32 – 122°F)
<b>Zdroj napájení</b>	9V baterie
<b>Rozměry</b>	Zařízení: 195 x 68 x 30mm Senzor: 70 x 58 x 220mm
<b>Délka kabelu</b>	1 m
<b>Váha</b>	460g včetně senzoru a baterie

## 2 Teoretický rozbor

### 2.1 Magnetické pole [2]

Magnetické pole vzniká v okolí stálého magnetu, kolem vodiče nebo uvnitř a vně cívky při průchodu elektrického proudu. Magnetické pole zobrazujeme magnetickými indukčními čarami. Magnetické indukční čáry jsou pomyslné čáry sloužící k znázornění průběhu a intenzity magnetického pole. Intenzita magnetického pole je vektorová veličina, to znamená, že její vektor je vždy tečnou k magnetickým indukčním čarám. Směr orientace intenzity i magnetických indukčních čár je shodný.

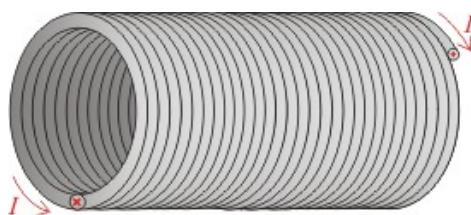
Pokud jsou účinky magnetického pole v každém místě stejné, jedná se o pole homogenní neboli stejnorodé. V opačném případě, pokud jsou účinky magnetického pole v každém bodě pole jiné, jedná se o pole nehomogenní neboli nestejnorodé.

Magnetické pole vybuzeé elektrickým proudem kolem vodiče má tvar soustředných kružnic. Pokud se nachází více vodičů v blízkosti, dochází k vektorovému součtu vektorů intenzity (závisí na orientaci vektorů).

### 2.2 Solenoid [3]

Solenoid (viz *Obrázek 2*) je elektrotechnická součástka používána v elektrických obvodech. Jedná se o cívku podlouhlého válcovitého tvaru, jejíž závity tvoří šroubovici. Závity jsou navinuty stejně hustě a mají kruhový průřez.

V úloze se uvažuje ideální solenoid nekonečně dlouhý. Jelikož je délka solenoidu mnohem větší než vlastní průměr, zanedbají se rušivé vlivy, které vznikají na začátku a na konci vinutí. U skutečného solenoidu konečné délky je pole kolem začátku a konce vinutí slabší a rozbíhá se.



*Obrázek 2 – Solenoid [3]*

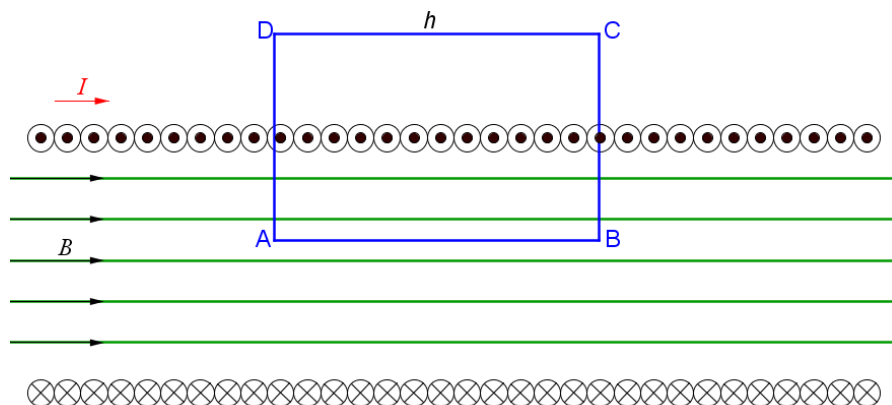
### 2.3 Magnetické pole solenoidu [3]

Magnetické pole solenoidu se bude modelovat z hlediska příspěvků jednotlivých závitů. Každý závit má své vlastní magnetické pole. Tato pole jsou tvořena nekonečným počtem orientovaných neprotínajících se křivek, jež představují magnetické indukční čáry, se středem uvnitř kruhového závitu. Každé pole je ovlivněno poli sousedních závitů. Vektory magnetické indukce se vektorově sčítají. Uvnitř solenoidu budou vektory magnetické indukce rovnoběžné a tím zde vzniká téměř homogenní magnetické pole.

### 3 Odvození vztahů

#### 3.1 Ampérův zákon [3]

V dostatečné vzdálenosti od obou konců solenoidu, aby nedocházelo ke zkreslení výsledku, se zvolí obdélník s vrcholy ABCD jako uzavřená Ampérová křivka (viz *Obrázek 3*). Strana AB je rovnoběžná s osou solenoidu a její délka se značí  $h$ .



Obrázek 3 - Uzavřená Ampérova křivka

Pro tento obdélník je možné rozdělit integrál z Ampérova zákona na součet čtyř dílčích integrálů, z nichž každý popisuje jednu stranu obdélníku ABCD.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Po zjednodušení vznikne vztah

$$B \cdot l = \mu_0 I_c$$

Nyní se upraví pravá strana Ampérova zákona.  $I_c$  představuje celkový proud procházející určitou plochou s určitou hranicí. Celkový proud se vypočítá jako součin počtu závitů a elektrického proudu  $I$  na jeden závit solenoidu

$$I_c = NI$$

Obě strany Ampérova zákona jsou zjednodušené a rozložili se na základní elementy. Nezbývá než sjednotit obě strany rovnice

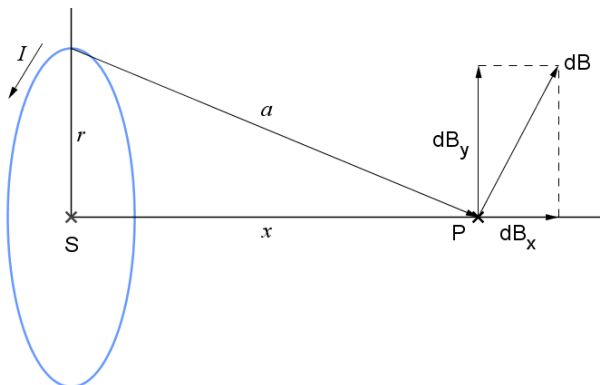
$$B \cdot l = N \cdot \mu_0 \cdot I$$

Vydělením délkou  $l$  vzniká konečný tvar

$$B = \frac{N \cdot \mu_0 \cdot I}{l} \quad (1)$$

### 3.2 Magnetická indukce v určitém bodě na ose kruhového závitu [4]

Magnetická indukce v určitém bodě, který leží na ose určité proudové smyčky (viz Obrázek 4), se určí pomocí Biotova-Savartova zákona. Uvažují se příspěvky magnetické indukce jednotlivých částí proudové smyčky v určitém bodě v určité vzdálenosti od závitu.



Obrázek 4 - Magnetická indukce v určitém bodě od proudové smyčky

Jednotlivé příspěvky  $d\vec{B}$  se určí ze zákona Biotova-Savartova

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \vec{a}}{a^3}$$

Magnetická indukce  $d\vec{B}$ , vzniklá v daném bodě působením proudového elementu  $Id\vec{l}$ , je kolmá k rovině tvořené vektory  $\vec{a}$  a  $d\vec{l}$ , což vyplývá z vektorového součinu a pravidla pravé ruky.

Jednotlivé příspěvky  $d\vec{B}$  budou v uvažovaném bodě vytvářet kužel, jehož osa bude totožná s osou proudové smyčky, čili závitu cívky. Výsledná magnetická indukce  $\vec{B}$  bude mít směr osy proudové smyčky, jelikož její protilehlé složky opisující kružnici  $dB_y$  se vždy navzájem vyruší. Zůstává pouze složka  $dB_x$ , která leží na ose proudové smyčky a z toho vyplývá, že výsledná magnetická indukce  $\vec{B}$  je této složce rovna.

$$B = B_x = \int_l dB_x$$

Složka  $dB_x = dB \cos \varphi$  a bude integrována podél celé smyčky. Z Biotova-Savartova zákona se určí vztah pro  $dB$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I|d\vec{l} \times \vec{a}|}{a^3}$$

Postupnými úpravami vznikne vztah

$$B = \int_l \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl a}{a^3} \cdot \frac{r}{a} = \int_l \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Irdl}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Následně se vztah integruje podél celé kružnice. Výraz  $dl$  je integrační proměnnou a je roven  $l$ , ostatní výrazy jsou konstanty. Konstanty se neintegrují, ale vytknou před integrál

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Ir}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_l dl$$

Výsledek se dosadí do upraveného Biotova-Savartova zákona. Délka  $l$  tvoří obvod proudové smyčky, která má tvar kružnice, jejíž obvod  $o = 2\pi r$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Ir \cdot 2\pi r}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nyní se vztah zjednoduší na konečný tvar

$$B = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

### 3.3 Vztah mezi magnetickou indukcí a indukčností cívky [5]

Indukčnost  $L$  je vyjádřena podílem magnetického toku  $\phi$  a proudu  $I$

$$L = \frac{\phi}{I} \quad (3)$$

Magnetický tok  $\phi$  lze vypočítat jako součin počtu závitů  $N$ , magnetické indukce  $B$ , obsahu plochy  $S$  a cosinu úhlu  $\alpha$ , kterým magnetický tok protíná danou plochu o obsahu  $S$

$$\Phi = NBS \cdot \cos \alpha = LI$$

Pro cívku platí, že magnetický tok je kolmý na plochu, čili úhel mezi vstupujícím magnetickým tokem a normálou plochy je  $0^\circ$  platí  $\alpha = 0^\circ$ . Z toho vyplývá  $\cos \alpha = 1$  a proto se funkce  $\cos \alpha$  ve vzorci pro cívku neprojeví.

$$NBS = LI \quad (4)$$

Ze vztahu (4) se vyjádří magnetická indukce  $B$

$$B = \frac{LI}{NS} \quad (5)$$

Pokud se celá rovnice (4) vydělí elektrickým proudem  $I$ , vyjádří se tím vztah pro indukčnost  $L$

$$L = \frac{NBS}{I}$$

Vzorec (4) lze dále upravit dosazením vztahu (1) za magnetickou indukci

$$L = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot S}{l}$$

### 3.4 Vlastní indukčnost [2]

Průchod proudu  $I$  cívkou s  $N$  závitů způsobí v cívce vybuzení magnetického toku  $\Phi$ . Se změnou proudu  $I$  se mění i magnetický tok  $\Phi$  a mezi svorkami cívky se indukuje napětí

$$u = N \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

Napětí, které se indukuje v cívce, při změně vlastního magnetického toku, je rovno

$$u = \lambda N^2 \cdot \frac{dI}{dt}$$

kde se  $\lambda$  je magnetická vodivost obvodu a součin  $\lambda N^2$  se označuje jako  $L$ , což je vlastní indukčnost

$$L = \lambda N^2$$

Indukčnost lze spočítat z impedance  $\underline{Z}$ , která je složena z činného odporu  $R$  a reaktance  $X$

$$\underline{Z} = R + jX \quad (6)$$

Reaktanci  $X$  je možno vyjádřit ze vztahu

$$X = \omega L$$

kde úhlová frekvence je rovna  $\omega = 2\pi f$ . Po dosazení získáme vztah

$$\underline{Z} = R + j2\pi fL$$

Velikost (absolutní hodnota) komplexní veličiny  $\underline{Z}$  je dána odmocninou součtu kvadrátu reálné a imaginární složky

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (7)$$

Úpravou vztahu (7) získáme indukčnost  $L$

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f} \quad (8)$$

### 3.5 Vzájemná indukčnost [2]

První cívkou prochází proud  $I_1$ , jenž v ní vytváří magnetický tok  $\phi_1$ . Pokud se vyskytnou cívky v dostatečné blízkosti, část magnetického toku  $\phi_1$  se uzavře přes druhou cívku (tento tok se značí  $\phi_{1,2}$ ). Indukované napětí se vypočte ze vzorce

$$u_2 = \lambda_{1,2} N_1 N_2 \cdot \frac{dI_1}{dt}$$

kde se  $\lambda_{1,2}$  je magnetická vodivost obvodu a součin  $\lambda_{1,2} N_1 N_2$  se označuje jako  $M$ , což je vzájemná indukčnost

$$u_2 = M \cdot \frac{dI_1}{dt}$$

Vzájemná indukčnost  $M$  je závislá pouze na geometrickém uspořádání cívek, proto je vzájemná indukčnost první cívky ke druhé stejná, jako vzájemná indukčnost druhé cívky k první.

Vzájemná reaktance dvou cívek je rovna

$$X_M = \omega M \quad (9)$$

### 3.6 Sériové spojování cívek [2]

Při sériovém spojení dvou cívek s indukčnostmi  $L_1$  a  $L_2$  tak, že magnetický tok  $\phi$  nezasahuje do druhé cívky, se vzájemná indukčnost rovná  $M = 0$ , potom

$$L = L_1 + L_2 \quad (10)$$

Při sériovém spojení dvou cívek s indukčnostmi  $L_1$  a  $L_2$  tak, že magnetické toky  $\phi$  v obou cívkách mají stejný směr a navzájem zasahují do druhé cívky, je vzájemná indukčnost  $M > 0$ , potom

$$L = L_1 + L_2 + 2M \quad (11)$$

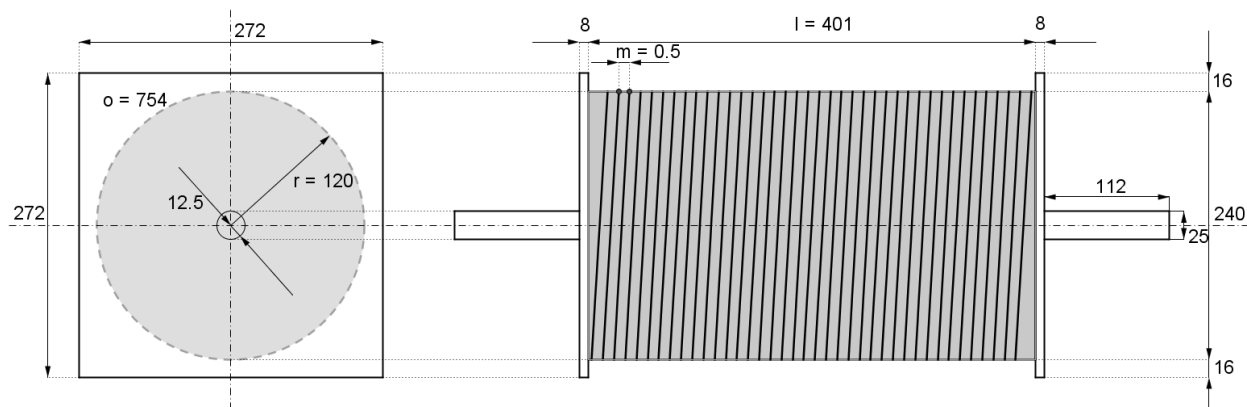
Při sériovém spojení dvou cívek s indukčnostmi  $L_1$  a  $L_2$  tak, že magnetické toky  $\phi$  v obou cívkách působí proti sobě a navzájem zasahují do druhé cívky, je vzájemná indukčnost  $M > 0$ , potom

$$L = L_1 + L_2 - 2M \quad (12)$$

V případě, že se uplatňuje vzájemná indukčnost  $M$  a tedy i vzájemná reaktance  $X_M$ , tak se reaktance  $X_+$  souhlasného spojení cívek bude lišit od reaktance  $X_-$  opačného spojení cívek.

$$X = X_1 + X_2 \pm 2X_M \quad (13)$$

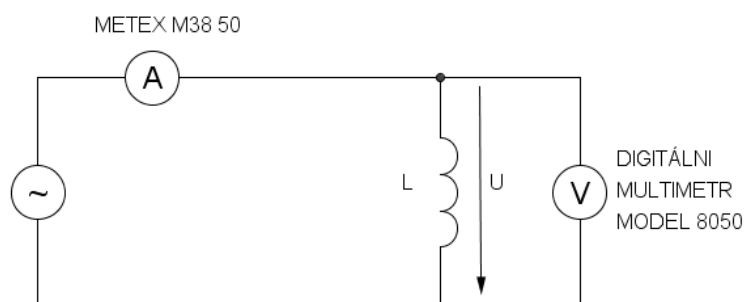
## 4 Jednovrstvá cívka



Obrázek 5 - Nárys a bokorys jednovrstvé cívky

Tabulka 2 - Rozměry a elektrické parametry jednovrstvé cívky

Rozměry			Elektrické veličiny			
veličina	symbol	hodnota	veličina	symbol	přístroj	hodnota
délka	$l$ (mm)	401	odpor	$R$ ( $\Omega$ )	METEX	24,2
poloměr	$r$ (mm)	120	odpor	$R$ ( $\Omega$ )	TEPCEL 120 Hz	24,0
průměr	$D$ (mm)	240	odpor	$R$ ( $\Omega$ )	TEPCEL 1 kHz	24,1
obvod	$o$ (mm)	754	indukčnost	$L$ (mH)	TEPCEL 120 Hz	15,0
poloměr Cu-smalt	$r_{CuP}$ (mm)	0,27	indukčnost	$L$ (mH)	TEPCEL 1 kHz	14,96
poloměr Cu	$r_{Cu}$ (mm)	0,25	napětí	$U$ (V)	Multimetr M8050	14,8
průřez Cu	$S_{Cu}$ (mm <sup>2</sup> )	0,196	proud	$I$ (A)	METEX	0,61
mezera mezi záv.	$m$ (mm)	0,5				



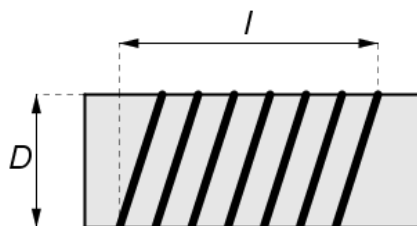
Obrázek 6 - Schéma zapojení jednovrstvé cívky

Délka vodiče jednoho závitů se vypočte ze vzorce

$$o = 2\pi r = 754 \text{ mm}$$

Počet závitů vychází z poměru průměru vinutí  $D$  a délky cívky  $l$  (viz *Obrázek 7*). Tento poměr odpovídá činiteli  $K$  což je tzv. Nagaokův činitel [6]

$$\frac{D}{l} = \frac{240}{401} = 0,598 \cong 0,6$$



*Obrázek 7 - Délka vinutí a průměr vinutí*

**Tabulka 3 - Činitel  $K$  v závislosti na poměru  $D/l$  [6]**

poměr $D/l$	činitel $K$	poměr $D/l$	činitel $K$
0,3	0,002617	1,6	0,00915
0,4	0,003355	1,8	0,00979
0,5	0,00404	2,0	0,01037
0,6	0,00467	2,1	0,01065
0,7	0,00526	2,2	0,01091
0,8	0,00582	2,3	0,01117
0,9	0,00631	2,4	0,01141
1,0	0,00680	2,5	0,01164
1,2	0,00767	2,7	0,01209
1,4	0,00845	3,0	0,01271

Z tabulky získaný činitel  $K$  se dosadí do vztahu (14), kterým se určí počet závitů cívky jako odmocnina podílu indukčnosti  $L$  a součinu průměru vinutí  $D$  a činitele  $K$  [6]

$$N = \sqrt{\frac{L}{D \cdot K}} = \sqrt{\frac{14980}{24 \cdot 0,00467}} \cong 365 \quad (-, \mu\text{H}, \text{cm}, -) \quad (14)$$

Délka vodiče jednoho závitů počítaný podle  $o = 2\pi r$  vynásobený počtem závitů  $N$  se rovná celkové délce vodiče cívky  $l_v$

$$l_v = o \cdot N = 754 \cdot 365 = 275 \text{ m}$$

Činný odpor  $R$  se vypočítá aritmetickým součtem naměřených hodnot různých měřících přístrojů

$$R = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3} = \frac{24,2 + 24 + 24,1}{3} = 24,1 \Omega$$

Pro ověření se činný odpor  $R$  může vyjádřit ze vzorce (15) jako součin měrného odporu  $\rho$  a podílu délky vodiče  $l_v$  cívky k jeho průřezu  $S$ . Obě hodnoty by měly být stejné.

$$R = \rho \cdot \frac{l_v}{S_{Cu}} = \frac{1}{57} \cdot \frac{275,21}{0,196} = 24,63 \Omega \quad (15)$$

Reaktance  $X$  je rovna součinu úhlové frekvence  $\omega = 2\pi f$  a indukčnosti cívky  $L$

$$X = 2\pi f L = 2\pi \cdot 50 \cdot 14,98 \cdot 10^{-3} = 4,71 \Omega$$

Impedance cívky se vyjádří podle vztahu (6). Impedance je komplexní veličina skládající se z reálné složky (odpor  $R$ ) a imaginární složky (reaktance  $X$ )

$$\underline{Z} = R + jX = 24,1 + j4,71 \Omega$$

Velikost (absolutní hodnota) komplexní veličiny ukazuje vztah (7) a je dána odmocninou součtu kvadrátů reálné a imaginární složky

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{24,1^2 + 4,71^2} = 24,56 \Omega$$

Elektrický proud  $I$  odpovídá podílu svorkového napětí zdroje  $U$  a impedance  $Z$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{14,5}{24,56} = 0,59 \text{ A}$$

Indukčnost  $L$  se určí aritmetickým součtem naměřených hodnot ze dvou měřících přístrojů

$$L = \frac{L_1 + L_2}{2} = \frac{15 + 14,96}{2} \cdot 10^{-3} = 14,98 \text{ mH}$$

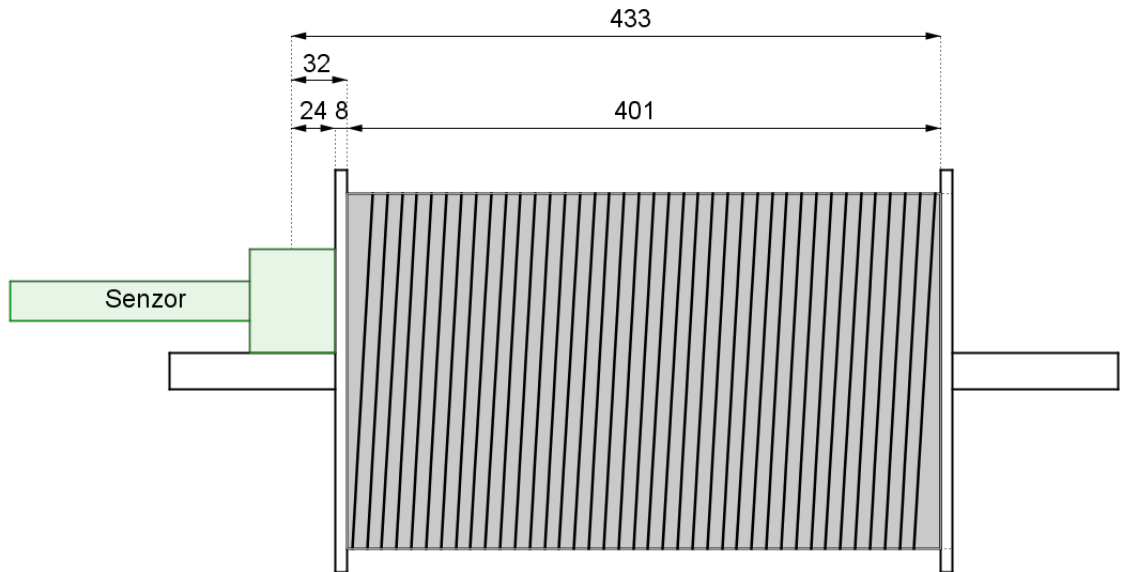
Pro ověření lze indukčnost  $L$  spočítat ze vztahu (8). Obě hodnoty by si měly být rovny.

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f} = \frac{\sqrt{24,58^2 - 24,1^2}}{2\pi \cdot 50} = 15,39 \text{ mH}$$

Magnetická indukce  $B_h$ , uvnitř homogenního pole cívky, se spočte podle vztahu (1), čili podílu součinu počtu závitů  $N$ , permeability vakua  $\mu_0$ , proudu  $I$  a délky cívky  $l$

$$B_h = \frac{N \cdot \mu_0 \cdot I}{l} = \frac{365 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,602}{0,401} = 6,888 \cdot 10^{-4} = 689 \mu\text{T}$$

Místo, kde se nachází sonda, neleží uvnitř homogenního pole cívky, nýbrž vně cívky (viz *Obrázek 8*). Podle Biotova-Savartova zákona je nutno znát proud  $I$  procházející cívkou, poloměr  $r$  závitů a vzdálenost  $x$  závitů od místa sondy.



*Obrázek 8 - Poloha sondy u jednovrstvé cívky*

Sonda má určité rozměry, proto se uvažuje vzdálenost z jejího středu, přes stěnu cívky k prvnímu a každému dalšímu závitů a tudíž bude vzdálenost pro každý závit jiná. Hodnota magnetické indukce  $B$  se vypočte podle vztahu (2) pro každý závit a výsledná magnetická indukce  $B$  je dána jejich součtem

$$B = \sum_{\substack{x=0,032 \\ x_{n+1}=x_n+0,0011}}^{0,433} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I r^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 245 \mu\text{T}$$

Příklad výpočtu prvního závitů

$$B_{11} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2} \cdot \frac{0,602 \cdot 0,12^2}{(0,12^2 + 0,032^2)^{\frac{3}{2}}} = 2,83 \mu\text{T}$$

Pro srovnání je možné použít upravený vztah (2), který určí celkovou magnetickou indukci cívky z jejíž rozměrů ( $b$  – vzdálenost od středu cívky ke kraji,  $x_s$  – vzdálenost od středu cívky k sondě) [8]

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 \cdot NI}{4b} \left[ \frac{b - x_s}{\sqrt{(b - x_s)^2 + r^2}} + \frac{b + x_s}{\sqrt{(b + x_s)^2 + r^2}} \right] = \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 365 \cdot 0,602}{4 \cdot 0,2005} \left[ \frac{0,2005 - 0,2165}{\sqrt{(0,2005 - 0,2165)^2 + 0,12^2}} + \frac{0,2005 + 0,2165}{\sqrt{(0,2005 + 0,2165)^2 + 0,12^2}} \right] = \\ &= 285 \mu\text{T} \end{aligned}$$

Tento způsob je co do přesnosti horší o 7,9 %, jelikož výsledná magnetická indukce není dána součtem magnetické indukce každého závitu, ale je určena z rozměrů cívky.

Absolutní chyba se vypočte jako rozdíl hodnoty změřené a hodnoty skutečné (v tomto případě je za skutečnou hodnotu brána hodnota vypočtená) [7]

$$\Delta_2 = B_{\text{naměřená}} - B_{\text{skutečná}} = 253 - 285 = 32 \mu\text{T}$$

Relativní chyba je rovna podílu absolutní chyby a skutečné hodnoty veličiny [7]

$$\delta_2 = \frac{\Delta}{B_{\text{skutečná}}} \cdot 100 = \frac{32}{285} \cdot 100 = 11,2 \%$$

**Tabulka 4 - Vypočtené hodnoty jednovrstvé cívky**

veličina	symbol	hodnota	jednotka
počet závitů	$N$	365	-
délka vodiče	$l_v$	275	m
odpor	$R$	24,1	$\Omega$
reaktance	$X$	4,71	$\Omega$
impedance	$Z$	24,56	$\Omega$
proud	$I$	0,59	A
indukčnost	$L$	14,98	mH
magnetická indukce homogenního pole	$B_h$	689	$\mu\text{T}$
magnetická indukce v místě čidla sondy	$B$	<b>245</b>	$\mu\text{T}$

**Tabulka 5 - Změřené hodnoty magnetické indukce jednovrstvé cívky**

	směřováno x ( $\mu\text{T}$ )	směřováno y ( $\mu\text{T}$ )	směřováno z ( $\mu\text{T}$ )
<b>x</b>	<b>247</b>	24	57
<b>y</b>	63	<b>226</b>	69
<b>z</b>	4	26	<b>253</b>
<b>max. hodnota (<math>\mu\text{T}</math>)</b>	<b>253</b>		

Tabulka je zkonstruována tak, že každému sloupci náleží směr sondy pro určitou osu a v řádcích jsou vypsány hodnoty ostatních os pro dané nasměrování.

Absolutní chyba se vypočte jako rozdíl hodnoty změřené a hodnoty skutečné (v tomto případě je za skutečnou hodnotu brána hodnota vypočtená) [7]

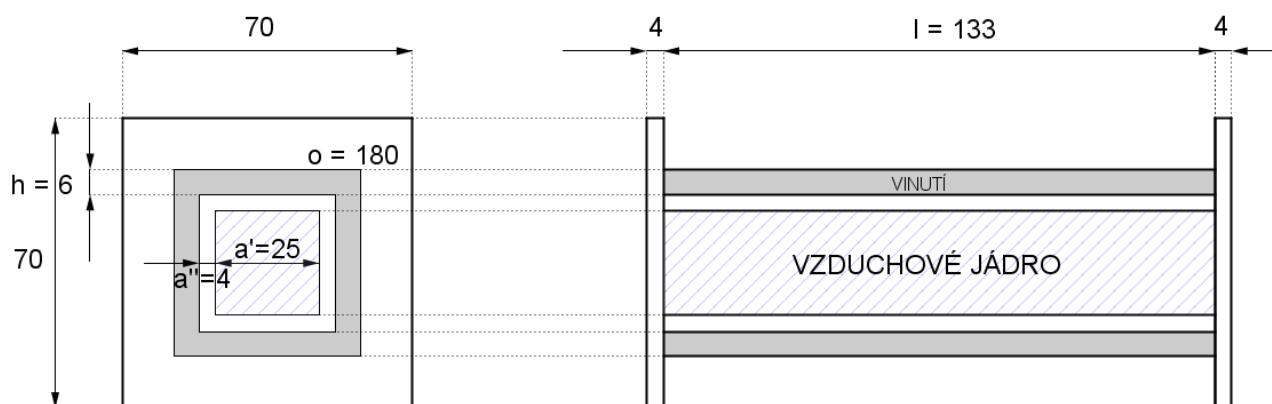
$$\Delta = B_{\text{naměřená}} - B_{\text{skutečná}} = 253 - 245 = 8 \mu\text{T}$$

Relativní chyba je rovna podílu absolutní chyby a skutečné hodnoty veličiny [7]

$$\delta = \frac{\Delta}{B_{\text{skutečná}}} \cdot 100 = \frac{8}{245} \cdot 100 = 3,3 \%$$



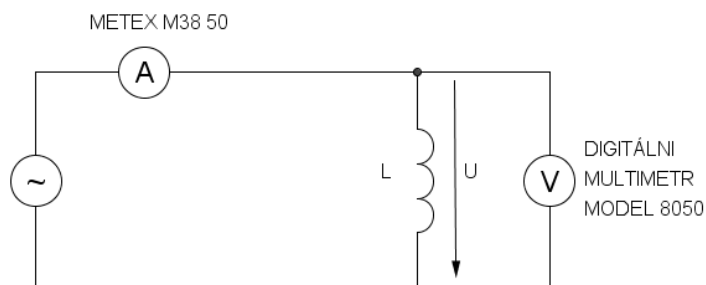
## 5 Vícevrstvá cívka



Obrázek 9 – Nárys a bokorys vícevrstvé cívky

Tabulka 6 - Rozměry a elektrické parametry vícevrstvé cívky

Rozměry			Elektrické veličiny			
veličina	symbol	hodnota	veličina	symbol	přístroj	hodnota
délka	$l$ (mm)	133	odpor	$R$ ( $\Omega$ )	METEX	2,800
výška vinutí	$h$ (mm)	6	odpor	$R$ ( $\Omega$ )	TEPCEL 120 Hz	2,665
vzduchové jádro	$a'$ (mm)	25	odpor	$R$ ( $\Omega$ )	TEPCEL 1 kHz	2,880
obal jádra	$a''$ (mm)	4	indukčnost	$L$ (mH)	TEPCEL 120 Hz	7,619
obvod	$o$ (mm)	180	indukčnost	$L$ (mH)	TEPCEL 1 kHz	7,600
poloměr Cu-smalt	$r_{\text{CuP}}$ (mm)	0,55	napětí	$U$ (V)	Multimetr M8050	4,32
poloměr Cu	$r_{\text{Cu}}$ (mm)	0,5	proud	$I$ (A)	METEX	1,21
průřez Cu	$S_{\text{Cu}}$ (mm <sup>2</sup> )	0,785				

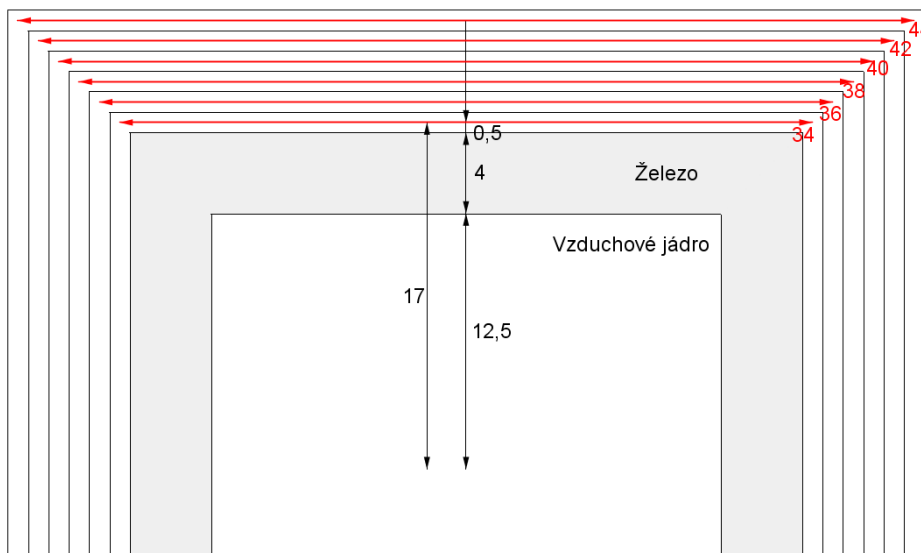


Obrázek 10 - Schéma zapojení vícevrstvé cívky

Počet závitů  $N$  se určí z rozměrů cívky a průměru jednoho závitu – 1 mm. Délka vinutí cívky je 133 mm a výška vinutí je 6 mm. Z těchto rozměrů lze usoudit, že vrstev je celkem 6 (viz *Obrázek 11*) a v každé je 133 závitů. Celkový počet závitů se vyjádří součinem počtu závitů na vrstvu a počtu vrstev

$$N = 133 \cdot 6 = 798$$

Tento počet je možno dokázat délkou vodiče namotaného na cívku. Nejprve se vypočte délka vodiče součtem obvodů všech závitů ve všech vrstvách (viz Tabulka 7).



*Obrázek 11 - Poloměry a střední délky vodiče*

**Tabulka 7 - Délky vodiče pro jednotlivé vrstvy a pro celou cívku**

vrstva	délka 1 závitu (m)	délka vodiče ve vrstvě (m)
1	$o_1 = 0,136$	18,088
2	$o_2 = 0,144$	19,152
3	$o_3 = 0,152$	20,216
4	$o_4 = 0,160$	21,280
5	$o_5 = 0,168$	22,344
6	$o_6 = 0,176$	23,408
<b>součet</b>		<b>124,5</b>

Následně se určí délka vodiče úpravou vztahu (15)

$$l_v = \frac{RS_{Cu}}{\rho} = \frac{2,782 \cdot 0,785}{\frac{1}{57}} = 124 \text{ m}$$

Obě hodnoty jsou shodné, což potvrzuje i počet závitů.

Činný odpor  $R$  se vypočítá aritmetickým součtem naměřených hodnot různých měřících přístrojů

$$R = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3} = \frac{2,8 + 2,665 + 2,88}{3} = 2,782 \, \Omega$$

Pro ověření se činný odpor  $R$  může vyjádřit ze vzorce (15) jako součin měrného odporu  $\rho$  a podílu délky vodiče  $l_v$  cívky k jeho průřezu  $S$ . Obě hodnoty by měly být stejné.

$$R = \rho \cdot \frac{l_v}{S_{Cu}} = \frac{1}{57} \cdot \frac{124}{0,785} = 2,778 \, \Omega$$

Reaktance  $X$  je rovna součinu úhlové frekvence  $\omega = 2\pi f$  a indukčnosti cívky  $L$

$$X = 2\pi f L = 2\pi \cdot 50 \cdot 7,61 \cdot 10^{-3} = 2,391 \, \Omega$$

Impedance cívky se vyjádří podle vztahu (6). Impedance je komplexní veličina skládající se z reálné složky (odpor  $R$ ) a imaginární složky (reaktance  $X$ )

$$\underline{Z} = R + jX = 2,782 + j2,391 \, \Omega$$

Velikost (absolutní hodnota) komplexní veličiny ukazuje vztah (7) a je dána odmocninou součtu kvadrátů reálné a imaginární složky

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{2,782^2 + 2,391^2} = 3,668 \, \Omega$$

Elektrický proud  $I$  odpovídá podílu svorkového napětí zdroje  $U$  a impedance  $Z$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{4,32}{3,668} = 1,18 \, A$$

Indukčnost  $L$  se určí aritmetickým součtem naměřených hodnot ze dvou měřících přístrojů

$$L = \frac{L_1 + L_2}{2} = \frac{7,619 + 7,6}{2} \cdot 10^{-3} = 7,61 \, mH$$

Pro ověření lze indukčnost  $L$  spočítat ze vztahu (8). Obě hodnoty by si měly být rovny.

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f} = \frac{\sqrt{3,57^2 - 2,78^2}}{2\pi \cdot 50} = 7,13 \, mH$$

Pro výpočet magnetické indukce uvnitř homogenního pole vícevrstvé cívky použijeme vzorec (5) jako součin indukčnosti  $L$  a proudu  $I$  vydělený součinem počtu závitů a plochy  $S_j$  jádra cívky

$$B_h = \frac{LI}{NS_j} = \frac{7,61 \cdot 10^{-3} \cdot 1,18}{798 \cdot 1,189 \cdot 10^{-3}} = 10,3 \, mT$$

kde  $S_j$  je rovno

$$S_j = (a' + 2 \cdot a'')^2 = (25 + 2 \cdot 4)^2 = 33^2 = 1089 \text{ mm}^2$$

Pro ověření by se tato vícevrstvá cívka pomyslně namotala jako jednovrstvá cívka a při délce vodiče  $l_v = 124,4 \text{ m}$  měla by 915 závitů

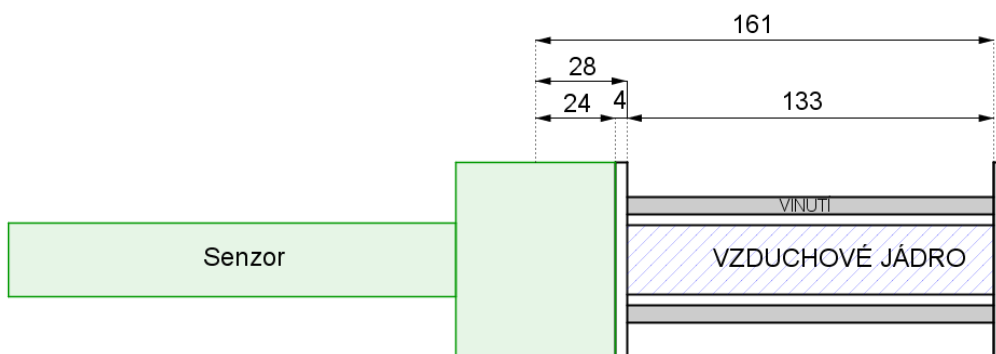
$$N_j = \frac{l_v}{o_1} = \frac{124,4}{0,136} = 915$$

Magnetická indukce  $B_h$  uvnitř homogenního pole cívky, počítána podle vzorce (1), by měla vyjít stejně i výpočtem podle vzorce (5)

$$B_h = \frac{N_j \cdot \mu_0 \cdot I}{l} = \frac{915 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,18}{0,133} = 6,888 \cdot 10^{-4} = 10,2 \text{ mT}$$

Magnetická indukce  $B_h$  vyšla oběma způsoby přibližně stejně.

Místo, kde se nachází sonda, neleží uvnitř homogenního pole cívky, nýbrž vně cívky (viz *Obrázek 12*). Podle Biotova-Savartova zákona je nutno znát proud  $I$  procházející cívkou, poloměr  $r$  závitů a vzdálenost  $x$  závitů od místa sondy.



*Obrázek 12 - Poloha sondy u vícevrstvé cívky*

Sonda má určité rozměry, proto se uvažuje vzdálenost z jejího středu, přes stěnu cívky k prvnímu a každému dalšímu závitů ve všech vrstvách a tudíž bude vzdálenost  $x$  pro každý závit jiná a poloměr  $r$  pro každou vrstvu jiný. Hodnota magnetické indukce  $B$  se vypočte pro každou vrstvu samostatně podle vztahu (2).

Magnetická indukce první vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,017 \text{ m}$ )

$$B_1 = \sum_{\substack{x=0,028 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,16} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 109 \text{ } \mu\text{T}$$

$$B_{11} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2} \cdot \frac{1,21 \cdot 0,17^2}{(0,17^2 + 0,028^2)^{\frac{3}{2}}} = 6,25 \text{ } \mu\text{T}$$

Magnetická indukce druhé vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,018 \text{ m}$ )

$$B_2 = \sum_{\substack{x=0,028 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,16} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 119 \text{ } \mu\text{T}$$

Magnetická indukce třetí vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,019 \text{ m}$ )

$$B_3 = \sum_{\substack{x=0,028 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,16} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 130 \text{ } \mu\text{T}$$

Magnetická indukce čtvrté vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,020 \text{ m}$ )

$$B_4 = \sum_{\substack{x=0,028 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,16} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 140 \text{ } \mu\text{T}$$

Magnetická indukce páté vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,021 \text{ m}$ )

$$B_5 = \sum_{\substack{x=0,028 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,16} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 150 \text{ } \mu\text{T}$$

Magnetická indukce šesté vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,022 \text{ m}$ )

$$B_6 = \sum_{\substack{x=0,028 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,16} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 160 \text{ } \mu\text{T}$$

Celková hodnota magnetické indukce  $B$  je dána součtem magnetických indukcí jednotlivých vrstev

$$B = \sum_{n=1}^6 B_n = 808 \text{ } \mu\text{T}$$

**Tabulka 8 - Vypočtené hodnoty vícevrstvé cívky**

veličina	symbol	hodnota	jednotka
počet závitů	$N$	798	-
délka vodiče	$l_v$	124,32	m
odpor	$R$	2,782	$\Omega$
reaktance	$X$	2,391	$\Omega$
impedance	$Z$	3,668	$\Omega$
proud	$I$	1,18	A
indukčnost	$L$	7,61	mH
magnetická indukce homogenního pole	$B_h$	10333	$\mu\text{T}$
magnetická indukce v místě čidla sondy	$B$	<b>808</b>	$\mu\text{T}$

**Tabulka 9 - Změřené hodnoty magnetické indukce jednovrstvé cívky**

	směřováno x ( $\mu\text{T}$ )	směřováno y ( $\mu\text{T}$ )	směřováno z ( $\mu\text{T}$ )
<b>x</b>	<b>739</b>	74	161
<b>y</b>	73	<b>540</b>	102
<b>z</b>	45	26	<b>941</b>
<b>max. hodnota (<math>\mu\text{T}</math>)</b>	<b>941</b>		

Tabulka je zkonstruována tak, že každému sloupci náleží směr sondy pro určitou osu a v řádcích jsou vypsány hodnoty ostatních os pro dané nasměrování.

Absolutní chyba se vypočte jako rozdíl hodnoty změřené a hodnoty skutečné (v tomto případě je za skutečnou hodnotu brána hodnota vypočtená) [7]

$$\Delta = B_{\text{naměřená}} - B_{\text{skutečná}} = |941 - 808| = 133 \mu\text{T}$$

Relativní chyba je rovna podílu absolutní chyby a skutečné hodnoty veličiny [7]

$$\delta = \frac{\Delta}{B_{\text{skutečná}}} \cdot 100 = \frac{133}{808} \cdot 100 = 16,5 \%$$

## 6 Sériové řazení cívek

### 6.1 Impedance sériového řazení cívek

Impedance se vyjádří podle vztahu (6)

$$\underline{Z} = R + jX$$

Cívky se nachází v těsné blízkosti a tím pádem se navzájem ovlivňují svými magnetickými toky  $\phi$ . V tomto případě se tedy uplatňuje vzájemná indukčnost  $M$  a tedy i vzájemná reaktance  $X_M$ . Součet impedancí obou cívek není možný, protože by byla ignorována vzájemná reaktance, a proto se nejprve určí činný odpor  $R$

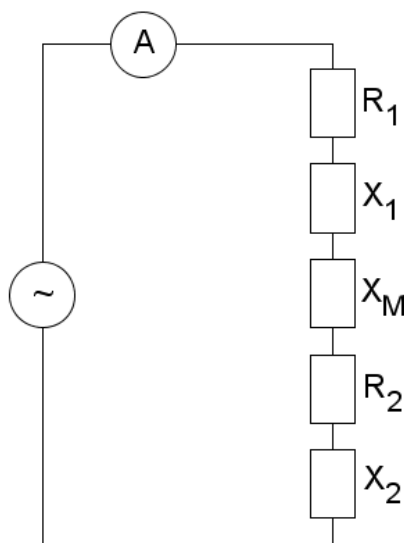
$$R = R_1 + R_2$$

poté se určí reaktance  $X$  a to pro souhlasné spojení  $X_+$  a opačné spojení  $X_-$  podle vztahu (13)

$$X = X_1 + X_2 \pm 2X_M$$

Nakonec je možno určit impedanci  $Z$  cívky podle vztahu (7)

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$



Obrázek 13 - Náhradní schéma sériového spojení

### 6.2 Indukčnost sériového řazení cívek

Výsledná indukčnost obou sériově spojených cívek se určí ze vztahu (11) a (12). Indukčnosti obou cívek jsou známy z předcházejících kapitol.

$$L_1 = 14,98 \text{ mH}; \quad L_2 = 7,61 \text{ mH}$$

Nyní je nutné určit vzájemnou indukčnost  $M$ , která se uplatňuje při sériovém spojení cívek, jež se navzájem ovlivňují svými magnetickými toky  $\phi$ . Podle vztahu (13) se určí hodnota reaktance  $X_+$  pro souhlasné spojení

$$X_+ = X_1 + X_2 + 2X_M$$

a reaktance  $X_-$  pro opačné spojení

$$X_- = X_1 + X_2 - 2X_M$$

Vznikne soustava dvou rovnic, jejíž řešením je vzájemná reaktance  $X_M$

$$X_+ = X_1 + X_2 + 2X_M$$

$$\underline{X_- = X_1 + X_2 - 2X_M}$$

$$X_+ = X_1 + X_2 + 2X_M$$

$$\underline{-X_- = -X_1 - X_2 + 2X_M}$$

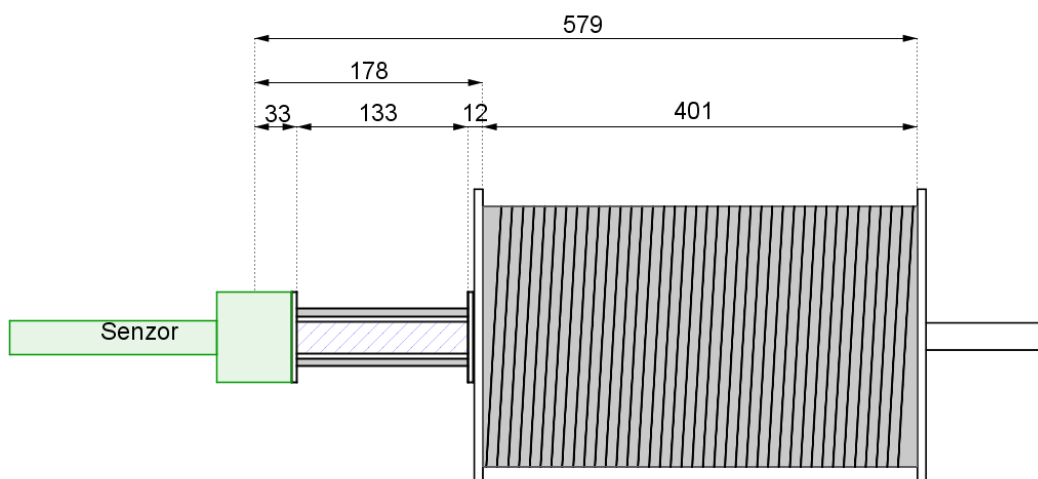
$$X_+ + X_- = 4X_M$$

$$X_M = \frac{X_+ + X_-}{4}$$

Úpravou vztahu (9) se vyjádří vzájemná indukčnost  $M$

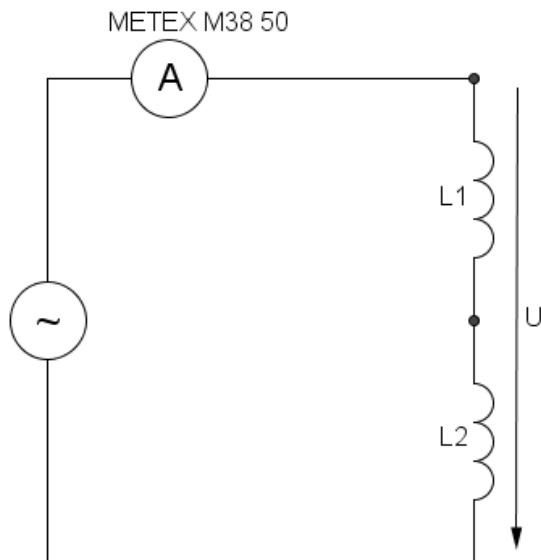
$$M = \frac{X_M}{\omega}$$

### 6.3 Magnetická indukce sériového řazení cívek (souhlasně)



Obrázek 14 - Poloha sondy sériového řazení cívek





Obrázek 15 - Schéma sériového řazení cívek

Magnetická indukce  $B_{L1}$  první cívky se určí podle Biotova-Savartova zákona. Pro výpočet je nutno znát proud ( $I = 0,56$  A) procházející cívkou, poloměr  $r$  závitů a vzdálenost  $x$  závitů od místa sondy. Sonda má určité rozměry, proto se uvažuje vzdálenost z jejího středu, přes stěnu cívky k prvnímu a každému dalšímu závitů ve všech vrstvách. Hodnota magnetické indukce  $B$  se vypočte podle vzorce (2) pro každou vrstvu samostatně.

Magnetická indukce první vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,017$  m)

$$B_1 = \sum_{\substack{x=0,033 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,166} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 38 \mu\text{T}$$

$$B_{11} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2} \cdot \frac{0,56 \cdot 0,017^2}{(0,017^2 + 0,033^2)^{\frac{3}{2}}} = 1,99 \mu\text{T}$$

Magnetická indukce druhé vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,018$  m)

$$B_2 = \sum_{\substack{x=0,033 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,166} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 42 \mu\text{T}$$

Magnetická indukce třetí vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,019$  m)

$$B_3 = \sum_{\substack{x=0,033 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,166} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 46 \mu\text{T}$$

Magnetická indukce čtvrté vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,020$  m)

$$B_4 = \sum_{\substack{x=0,033 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,166} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 50 \mu\text{T}$$

Magnetická indukce páté vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,021$  m)

$$B_5 = \sum_{\substack{x=0,033 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,166} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 54 \mu\text{T}$$

Magnetická indukce šesté vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,022$  m)

$$B_6 = \sum_{\substack{x=0,033 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,166} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 57 \mu\text{T}$$

Celková hodnota magnetické indukce  $B_{L1}$  je dána součtem magnetických indukcí jednotlivých vrstev

$$B_{L1} = \sum_{n=1}^6 B_n = 287 \mu\text{T}$$

Magnetická indukce  $B_{L2}$  druhé cívky se určí stejným způsobem podle vzorce (2). Je nutno uvažovat, že se mezi sondou a prvním závitem druhé cívky nachází první cívka, jejíž rozměr je nutno započítat (viz *Obrázek 14*)

$$B_{L2} = \sum_{\substack{x=0,178 \\ x_{n+1}=x_n+0,0011}}^{0,579} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 49 \mu\text{T}$$

$$B_{11} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2} \cdot \frac{0,56 \cdot 0,12^2}{(0,12^2 + 0,178^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,52 \mu\text{T}$$

Magnetická indukce  $B$  sériového řazení cívek je rovna součtu magnetických indukcí obou cívek.

$$B = B_{L1} + B_{L2} = 287 + 49 = 336 \mu\text{T}$$

**Tabulka 10 - Vypočtené veličiny sériového spojení stejné orientace cívek**

veličina	symbol	hodnota	jednotka
magnetická indukce (vrstva 1)	$B_1$	38	$\mu\text{T}$
magnetická indukce (vrstva 2)	$B_2$	42	$\mu\text{T}$
magnetická indukce (vrstva 3)	$B_3$	46	$\mu\text{T}$
magnetická indukce (vrstva 4)	$B_4$	50	$\mu\text{T}$
magnetická indukce (vrstva 5)	$B_5$	54	$\mu\text{T}$
magnetická indukce (vrstva 6)	$B_6$	57	$\mu\text{T}$
magnetická indukce cívky 1	$B_{L1}$	287	$\mu\text{T}$
magnetická indukce cívky 2	$B_{L2}$	49	$\mu\text{T}$
magnetická indukce v místě čidla sondy	$B$	<b>336</b>	$\mu\text{T}$

**Tabulka 11 - Změřené hodnoty magnetické indukce sériového spojení stejné orientace cívek**

	směřováno y ( $\mu\text{T}$ )
<b>x</b>	50
<b>y</b>	<b>385</b>
<b>z</b>	40
<b>max. hodnota (<math>\mu\text{T}</math>)</b>	<b>385</b>

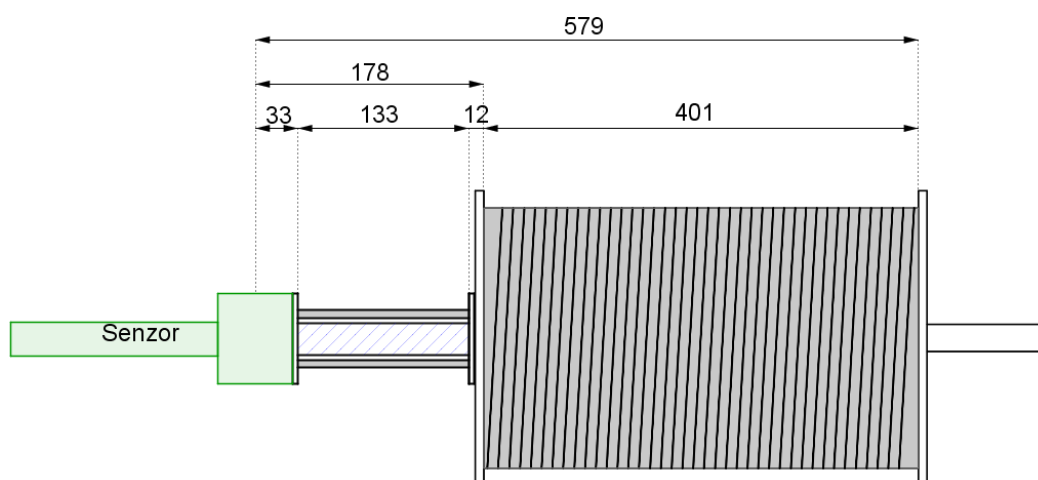
Absolutní chyba se vypočte jako rozdíl hodnoty změřené a hodnoty skutečné (v tomto případě je za skutečnou hodnotu brána hodnota vypočtená) [7]

$$\Delta = B_{\text{naměřená}} - B_{\text{skutečná}} = |385 - 336| = 49 \mu\text{T}$$

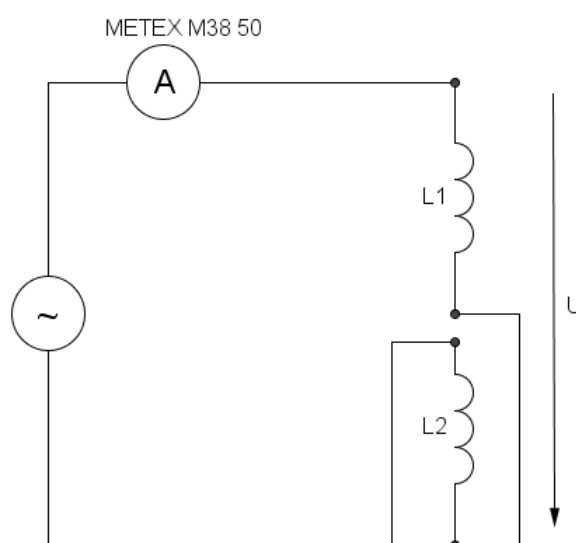
Relativní chyba je rovna podílu absolutní chyby a skutečné hodnoty veličiny [7]

$$\delta = \frac{\Delta}{B_{\text{skutečná}}} \cdot 100 = \frac{49}{336} \cdot 100 = 14,6 \%$$

## 6.4 Magnetická indukce sériového řazení cívek (opačně)



Obrázek 16 - Poloha sondy sériového řazení cívek (opačná orientace)



Obrázek 17 - Schéma sériového řazení cívek (opačná orientace)

Magnetická indukce  $B_{L1}$  první cívky se určí podle Biotova-Savartova zákona. Pro výpočet je nutno znát proud ( $I = 0,55 \text{ A}$ ) procházející cívkou, poloměr  $r$  závitů a vzdálenost  $x$  závitů od místa sondy. Sonda má určité rozměry, proto se uvažuje vzdálenost z jejího středu, přes stěnu cívky k prvnímu a každému dalšímu závitů ve všech vrstvách. Hodnota magnetické indukce  $B$  se vypočte podle vzorce (2) pro každou vrstvu samostatně.

Magnetická indukce první vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,017$  m)

$$B_1 = \sum_{\substack{x=0,033 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,166} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 38 \mu\text{T}$$

$$B_{11} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2} \cdot \frac{0,55 \cdot 0,017^2}{(0,017^2 + 0,033^2)^{\frac{3}{2}}} = 1,96 \mu\text{T}$$

Magnetická indukce druhé vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,018$  m)

$$B_2 = \sum_{\substack{x=0,033 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,166} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 41 \mu\text{T}$$

Magnetická indukce třetí vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,019$  m)

$$B_3 = \sum_{\substack{x=0,033 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,166} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 45 \mu\text{T}$$

Magnetická indukce čtvrté vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,020$  m)

$$B_4 = \sum_{\substack{x=0,033 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,166} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 49 \mu\text{T}$$

Magnetická indukce páté vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,021$  m)

$$B_5 = \sum_{\substack{x=0,033 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,166} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 53 \mu\text{T}$$

Magnetická indukce šesté vrstvy jako součet dílčích magnetických indukcí všech závitů ( $r = 0,022$  m)

$$B_6 = \sum_{\substack{x=0,033 \\ x_{n+1}=x_n+0,001}}^{0,166} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 56 \mu\text{T}$$

Celková hodnota magnetické indukce  $B_{L1}$  je dána součtem magnetických indukcí jednotlivých vrstev

$$B_{L1} = \sum_{n=1}^6 B_n = 282 \mu\text{T}$$

Magnetická indukce  $B_{L2}$  druhé cívky se určí stejným způsobem podle vzorce (2). Je nutno uvažovat, že se mezi sondou a prvním závitem druhé cívky nachází první cívka, jejíž rozměr je nutno započítat (viz Obrázek 16)

$$B_{L2} = \sum_{\substack{x=0,178 \\ x_{n+1}=x_n+0,0011}}^{0,579} \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 48 \mu\text{T}$$

$$B_{11} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2} \cdot \frac{0,55 \cdot 0,12^2}{(0,12^2 + 0,178^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,51 \mu\text{T}$$

Magnetická indukce  $B$  sériového řazení cívek je rovna rozdílu magnetických indukcí obou cívek.

$$B = B_{L1} - B_{L2} = 282 - 48 = 234 \mu\text{T}$$

**Tabulka 12 - Vypočtené veličiny sériového spojení opačné orientace cívek**

veličina	symbol	hodnota	jednotka
magnetická indukce (vrstva 1)	$B_1$	38	$\mu\text{T}$
magnetická indukce (vrstva 2)	$B_2$	41	$\mu\text{T}$
magnetická indukce (vrstva 3)	$B_3$	45	$\mu\text{T}$
magnetická indukce (vrstva 4)	$B_4$	49	$\mu\text{T}$
magnetická indukce (vrstva 5)	$B_5$	53	$\mu\text{T}$
magnetická indukce (vrstva 6)	$B_6$	56	$\mu\text{T}$
magnetická indukce cívky 1	$B_{L1}$	282	$\mu\text{T}$
magnetická indukce cívky 2	$B_{L2}$	48	$\mu\text{T}$
magnetická indukce v místě čidla sondy	$B$	<b>234</b>	$\mu\text{T}$

**Tabulka 13 - Změřené hodnoty magnetické indukce sériového spojení opačné orientace cívek**

	směřováno y ( $\mu\text{T}$ )
<b>x</b>	47
<b>y</b>	<b>316</b>
<b>z</b>	30
<b>max. hodnota (<math>\mu\text{T}</math>)</b>	<b>316</b>

Absolutní chyba se vypočte jako rozdíl hodnoty změřené a hodnoty skutečné (v tomto případě je za skutečnou hodnotu brána hodnota vypočtená) [7]

$$\Delta = B_{\text{naměřená}} - B_{\text{skutečná}} = |316 - 234| = 82 \mu\text{T}$$

Relativní chyba je rovna podílu absolutní chyby a skutečné hodnoty veličiny [7]

$$\delta = \frac{\Delta}{B_{\text{skutečná}}} \cdot 100 = \frac{82}{236} \cdot 100 = 34,7 \%$$

## 7 Závěr

Pro zhotovení bakalářské práce bylo provedeno měření, které sloužilo jako zdroj hodnot, jež měly být dokázány teoretickým výpočtem. Výpočty vycházejí z teorie, která byla popsána v úvodních odstavcích.

Cílem první úlohy byl výpočet parametrů jednovrstvé válcové cívky (solenoidu) a parametrů jejího magnetického pole se zaměřením na magnetickou indukci a indukčnost. Nejprve bylo nutno stanovit činný odpor vodiče. Je třeba si uvědomit, že vodič pokrývá malá vrstva smaltu, která slouží jako izolace, aby nedošlo k mezizávitovým zkratům, takže bylo potřeba určit průřez samotného vodiče. Odpor se určil z délky vodiče, měrného odporu a průřezu. Pro ověření byl odpor změřen dvěma přístroji, konkrétně METEX a TEPCEL. Odpor vodiče vyšel všemi metodami stejně s minimálními odchylkami. Počet závitů byl vypočten pomocí Nagaokova činitele, který se používá pro návrh cívek. Počet závitů jednovrstvé cívky je 365. Indukčnost byla změřena přístrojem TEPCEL, byly provedeny dvě měření a výsledná indukčnost byla určena jejich aritmetickým součtem. Je potřeba upozornit, že je nutno přístroj před měřením správně zkalibrovat, jinak hrozí chyba měření. Hodnota indukčnosti byla rovněž ověřena druhou početní metodou a to výpočtem z hodnot napětí a proudu. Uvnitř cívky byla vypočtena hodnota magnetické indukce  $689 \mu\text{T}$ . Tato hodnota bohužel nemohla být změřena z důvodu nepřístupnosti vnitřních částí cívky. Následně byla vypočtena hodnota magnetické indukce v ose cívky na jednom z jejích okrajů pomocí dvou způsobů, které vycházejí z Biotova-Savartova zákona. První způsob počítá příspěvek každého závitu zvlášť a výsledná hodnota je pak dána sumací. Tato možnost je o 7,9 % přesnější než možnost druhá, která je sice jednodušší a rychlejší, ale magnetickou indukci počítá z rozměrů cívky a zde vzniká určitá nepřesnost. Magnetická indukce na okraji cívky v místě sondy je  $245 \mu\text{T}$ . Relativní odchylka první metody je 3,3 %. Chyba měření byla způsobena zejména tím, že nebylo možno se sondou dostat přímo na osu cívky a také tím, že sonda měří různé hodnoty v každé ose. Chyba výpočtu je dána především chybou vzdálenosti mezi senzorem, jehož umístění v sondě není přesně známo, a závity cívky.

Druhá úloha byla koncipována stejně jako úloha první s rozdílem použití vícevrstvé cívky namísto solenoidu. Počet závitů je určen z průměru závitu a rozměrů cívky. Nejdřív byl vypočtený počet závitů na vrstvu a potom počet vrstev. Počet závitů je potom dán součinem počtu vrstev a počtu závitů na vrstvu. Celkový počet závitů je 798. Poté byly určeny střední délky vodiče každé vrstvy a z nichž potom celková délka vodiče, která se musí shodovat s délkou vodiče vypočtenou přes odpor vodiče. Hodnoty se shodují, což potvrzuje správnost výpočtu. Ostatní parametry jako odpor, indukčnost, impedance byly počítány stejným způsobem jako v úloze předchozí. Výpočet magnetické indukce uvnitř vícevrstvé cívky byl proveden dvěma způsoby. Jeden spočíval v pomyslném rozmotání cívky a její znovu navinutí jako jednovrstvou, ale o to delší cívku a následně výpočet jako v předchozím případě. Druhý způsob vychází ze vzorce pro magnetický tok, který by měl být důvěryhodnější. I tak vyšly obě metody stejně  $10,3 \text{ mT}$  s minimální odchylkou. Tato veličina opět nemohla být změřena, tentokrát z důvodu příliš velkých rozměrů sondy v porovnání s cívkou a jejím vzduchovým jádrem. Magnetická indukce v ose vícevrstvé cívky byla počítána opět sumací příspěvků všech závitů ve všech vrstvách vůči bodu na okraji cívky. Magnetická indukce na okraji cívky v místě sondy je  $808 \mu\text{T}$ . Relativní odchylka je 16,5 %. Chyba měření je v druhé úloze větší než v úloze první a to z důvodu rozměrů cívky, která byla téměř stejně velká jako samotná sonda. Tento fakt způsobuje, že se magnetický tok může uzavírat skrz sondu jen okrajově a tím zkreslovat změřenou hodnotu. Chyba výpočtu je opět dána chybou vzdálenosti mezi senzorem, jehož umístění v sondě není přesně známo,

a závit cívk. Další chybu způsobuje fakt, že závit nebyl přesně kruhový, ale spíše čtvercový se zaoblenými rohy, což připomíná jakýsi ovál.

Poslední dvě úlohy byly navrhнутy jako sériové spojení výše uvedených cívek. Hlavním problémem byl výpočet indukčnosti sériového zapojení. Indukčnost soustavy dvou cívek nebyla během měření změřena. Jelikož se při sériovém spojení dvou cívek uplatňuje i vzájemná indukčnost, je nutno tuto veličinu určit ze vzájemné reaktance. Výpočet impedance bohužel probíhal na úrovni chyby měření a tak nebylo možno impedanci soustavy určit. Problémem byla nepřesnost změřeného proudu v důsledku chyby měřicího přístroje. Důsledkem této nepřesnosti vycházel činný odpor větší jak samotná impedance. Když by se od změřeného proudu odečetla chyba přístroje, která činí  $\pm 0,01$  A výrazně by to ovlivnilo velikost impedance, která se s každou setinou ampéru výrazně zvětšila. Pak by již činný odpor nebyl větší a bylo by možné spočítat reaktanci. Pro tyto komplikace je výpočet vzájemné indukčnosti uveden pouze obecně. Magnetická indukce pro sériové spojení byla určena stejně jako v předchozích úlohách. Nejprve se vypočetla magnetická indukce jednovrstvé a vícevrstvé cívk v ose cívek ve vzdálenosti od sondy. Hodnota magnetické indukce pro sériové zapojení souhlasné orientace je dána součtem magnetických indukcí obou cívek a vyšla  $336 \mu\text{T}$ . Relativní odchylka je 14,6 %. Magnetická indukce pro sériové zapojení opačné orientace je dána rozdílem magnetických indukcí obou cívek a vyšla  $234 \mu\text{T}$ . Relativní odchylka je 34,7 %. Chyba výpočtu je dána zejména nepřesnou hodnotou proudu a také rozdílnou velikostí obou cívek. Vícevrstvá cívka je přibližně 3x kratší a 3,5x užší.

Na závěr je možno říct, že přístroj EXTECH Model 480826 je vhodný spíše pro měření magnetické indukce větších objektů, například generátorů, venkovního vedení a kabelů, u kterých se rozměr sondy nebude negativně projevovat na měřené hodnotě.



## 8 Literatura

- [1] Three Axis Electromagnetic Field (EMF) Meter User Guide: Model 480826.  
In: *Extech* [online]. 2013 [cit. 2016-04-23]. Dostupné z:  
[http://www.extech.com/instruments/resources/manuals/480826\\_um.pdf](http://www.extech.com/instruments/resources/manuals/480826_um.pdf)
- [2] VOŽENÍLEK, Ladislav. *Kurs elektrotechniky*. 2., přeprac. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1988.
- [3] Magnetické pole solenoidu. *Sbírka řešených úloh* [online]. 2016 [cit. 2016-04-18]. Dostupné z:  
<http://reseneulohy.cz/451/magneticke-pole-solenoidu#eqref-2>
- [4] Magnetická indukce na ose kruhového závitu. *Sbírka řešených úloh* [online]. 2016 [cit. 2016-04-18]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/395/magneticka-indukce-na-ose-kruhoveho-zavitu>
- [5] Vlastní indukce. *Encyklopedie fyziky* [online]. ©2006-2016 [cit. 2016-04-18]. Dostupné z:  
<http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/307-vlastni-indukce>
- [6] Výpočet cívky. *Pandatron.cz: Elektrotechnický magazín* [online]. ©Copyright2000-2016 [cit. 2016-04-18]. Dostupné z: [http://pandatron.cz/?209&vypocet\\_civek](http://pandatron.cz/?209&vypocet_civek)
- [7] Přesnost a chyby měření. *Jihočeská univerzita České Budějovice: Pedagogická fakulta* [online]. [cit. 2016-04-18]. Dostupné z:  
[http://home.pf.jcu.cz/~kriz/index.php?option=com\\_content&view=article&id=226:chybymer&catid=55:fprl&Itemid=27](http://home.pf.jcu.cz/~kriz/index.php?option=com_content&view=article&id=226:chybymer&catid=55:fprl&Itemid=27)
- [8] SZÉKELY, Juraj. *Teoretická elektrotechnika II: určeno pro posluchače fak. energetické*. 2. vyd. Bratislava: Alfa, 1973. Dočasné vysokoškolské učebnice.